الإسم:

إختبار مادة:

اللقب:

الموضوع رقم: 01 / 10 مواضيع

ورقة الإجابة

التمرين الأول:

$U_0 = 3 \qquad U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n^2}{2}}$

① حساب الحدود لدينا

$U_1 = \sqrt{\frac{1+U_0^2}{2}} = \sqrt{5}$ (0,25)

$U_2 = \sqrt{\frac{1+U_1^2}{2}} = \sqrt{3} \qquad U_3 = \sqrt{\frac{1+U_2^2}{2}} = \sqrt{2}$

البرهان بالتراجع على أن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $P(n): U_n > 1$

لدينا $U_0 > 1$ ومنه $P(0)$ محققة. (0,25)

ليكن $n \in \mathbb{N}$ نفرض صحة $P(n)$، $U_n > 1$ ومنه $U_n^2 > 1$

ومنه $\frac{U_n^2+1}{2} > \frac{2}{2}$ ومنه $\sqrt{\frac{U_n^2+1}{2}} > 1$ ومنه $U_{n+1} > 1$

ومنه $P(n+1)$ محققة.

② إتجاه تغير (U_n) ليكن $n \in \mathbb{N}$، $U_{n+1} - U_n = \sqrt{\frac{1+U_n^2}{2}} - U_n$

$= \frac{\left(\sqrt{\frac{1+U_n^2}{2}} - U_n\right)\left(\sqrt{\frac{1+U_n^2}{2}} + U_n\right)}{\sqrt{\frac{1+U_n^2}{2}} + U_n} = \frac{\frac{1+U_n^2}{2} - \frac{2U_n^2}{2}}{\sqrt{\frac{1+U_n^2}{2}} + U_n}$

$= \frac{1 - U_n^2}{2\left(\sqrt{\frac{1+U_n^2}{2}} + U_n\right)}$ (0,25)

هذا الفرق له نفس إشارة $1-U_n^2$ لأن $2\left(\sqrt{\frac{1+U_n^2}{2}}+U_n\right)>0$

لدينا $U_n>1$ ومنه $U_n^2>1$ ومنه $-U_n^2<-1$ ومنه $1-U_n^2<0$

ومنه $U_{n+1}-U_n<0$ إذن (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

بما أن (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

تعيين النهاية: نضع $f(\ell)=\ell$ حيث f الدالة المرفقة بـ (U_n) (0,25)

$\sqrt{\frac{1+\ell^2}{2}}=\ell$ ومنه $\frac{1+\ell^2}{2}=\ell^2$ ومنه $1+\ell^2=2\ell^2$

ومنه $1=\ell^2$ ومنه $\ell=1$

أو $\ell=-1$ مرفوضة لأن $U_n>1$ من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ (0,25)

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=1$

3) أ- المتتالية (V_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ لأن:

ليكن $n\in\mathbb{N}$

$$V_{n+1}=U_{n+1}^2-1=\frac{1+U_n^2}{2}-\frac{2}{2}$$ (0,25)

$$=\frac{U_n^2-1}{2}=\frac{1}{2}(U_n^2-1)=\frac{1}{2}V_n$$

وحدها الأول $V_0=$ لأن $V_0=U_0^2-1=8$ (0,25)

ب- V_n بدلالة n، من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

$$V_n=V_0\times q^n$$

$$=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$ (0,25)

لدينا $V_n=U_n^2-1$ ومنه $U_n^2=V_n+1$ ومنه $U_n=\sqrt{V_n+1}$

$$U_n=\sqrt{8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}$$ (0,25)

نهاية (U_n):

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}=1$$ (0,25)

لأن $\lim_{n\to+\infty} 8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ إذن $-1 < q < 1$

ت) المجاميع

$S_n = U_0^2 + U_1^2 + \dots + U_n^2$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$= V_0 + 1 + V_1 + 1 + \dots + V_n + 1$

$U_n^2 = V_n + 1$

$= V_0 + V_1 + \dots + V_n + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n+1 \text{ مرة}}$

$= 8\times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} + 1\times(n+1)$ (0,25)

$= 16\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + n + 1$

$T_n = V_0 + 2V_1 + 2^2V_2 + \dots + 2^nV_n$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$= \underbrace{8 + 8 + \dots + 8}_{n+1 \text{ مرة}}$

$2^nV_n = 2^n \times 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$= 8(n+1)$ (0,25)

$= 8$

$L_n = \ln(V_0) + \ln(V_1) + \dots + \ln(V_n)$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$= \dfrac{\left(\ln(8) + \ln(8) + n\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)(n+1)}{2}$

$\ln(V_n) = \ln\left(8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

$= \dfrac{\left(2\ln(8) + n\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right)(n+1)}{2}$ (0,25)

$= \ln(8) + n\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

إذن L_n هو مجموع
$n+1$ حدًا متعاقبة لمتتالية
حسابية حدها الأول هو $\ln(8)$
أساسها هو $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

التمرين الثاني :

1- أ) القيم الممكنة للمتغير العشوائي :

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$ (0,5)

قانون الاحتمال :

x_i	0	1	2	3	4
P_i	$\frac{7}{45}$	$\frac{20}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{5}{45}$	$\frac{1}{45}$

(1)

عدد الحالات الممكنة $C_{10}^{2} = 45$

$$P(X=0) = \frac{C_3^2 + C_2^2 + C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{7}{45}$$

$$P(X=4) = \frac{C_1^1 \times C_1^1}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$$

$$P(X=3) = \frac{C_1^1 \times C_2^1 + C_3^1 \times C_1^1}{C_{10}^2} = \frac{5}{45}$$

$$P(X=2) = \frac{C_1^1 \times C_3^1 + C_3^1 \times C_2^1 + C_3^1 \times C_1^1}{C_{10}^2} = \frac{12}{45}$$

$$P(X=1) = 1 - P_1 - P_3 - P_4 - P_5 = \frac{20}{45}$$

(0,5)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{5} x_i P_i = \frac{63}{45}$$ الأمل الرياضياتي

$$\simeq 1,4$$

2) أ - عدد الحالات الممكنة : $A_{10}^2 = 90$ (0,25)

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{2A_5^1 \times A_3^1 + 2A_5^1 \times A_2^1 + 2A_3^1 \times A_2^1}{A_{10}^2}$$ (0,75)

$$P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{A_3^2}{A_{10}^2} = \frac{6}{90}$$ (0,75)

التمرين الثالث

I/ ① حل المعادلة : نضع

$$(Z+2-3i)(Z^2-2Z+10)=0$$

$$\begin{cases} Z+2-3i=0 \quad \text{--} ① \\ Z^2-2Z+10=0 \quad \text{--} ② \end{cases}$$

(0,5)

من ① $Z_1 = -2+3i$

من ② لدينا $\Delta = b^2-4ac = 4-4\times 10 = -36$

لدينا $(6i)^2 = -36$

ومنه $Z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-6i}{2} = 1-3i$ ، $Z_3 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+6i}{2} = 1+3i$

II/ 1، أ- لدينا

$$\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} = \frac{1-3i-1-3i}{-2+3i-1-3i} = \frac{-6i}{-3} = 2i$$ (0,25)

$$|2i| = \sqrt{0^2+2^2} = 2$$

نضع $\arg(i)=\theta$ $\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{0}{2} = 0$

$\sin\theta = y/r = \frac{2}{2} = 1$

ومنه $\arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

حيث $k \in \mathbb{Z}$ (0,25)

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = re^{i\theta} = 2e^{i\pi/2}$$

ب) التحويل T الذي يحول A إلى B هو تشابه مباشر

مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و نسبته 2..

لأن $\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$

$= \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

و $\left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \frac{CB}{CA} = 2$ (0,25)

ومنه $CB = 2CA$ (0,5)

ومنه المثلث ABC مثلث قائم في C.

بما أن ABC مثلث قائم في C فإن النقط A، B، C

تنتمي إلى دائرة (T) قطرها [AB]

أو مركزها Ω حيث Ω منتصف [AB] (0,25)

$$z_\Omega = \frac{z_B + z_A}{2} = \frac{-2+3i+1-3i}{2} = -\frac{1}{2}$$

ونصف قطرها

$$r = \frac{AB}{2} = \frac{|z_B - z_A|}{2} = \frac{|1-3i+2-3i|}{2} = \left|\frac{3-6i}{2}\right| = \frac{3}{2}\sqrt{5}$$

2) أ- لتكن M نقطة من المستوى لاحقتها z

نضع $\left|\frac{z-z_A}{z-z_C}\right|=1$ ومنه $\frac{|z_M-z_A|}{|z_M-z_C|}=1$ ومنه $\frac{AM}{CM}=1$

ومنه $AM = CM$ ومنه (Δ) هي محور $[AC]$ (0,5)

ب- صورة (Δ) بواسطة التشابه المباشر (T) هي (Δ')

بما أن $T(A)=B$ $T(C)=C$

ومنه $T([AC])=[BC]$ (0,5)

ومنه (Δ') هو محور القطعة المستقيمة $[BC]$

3) أ- C مرجح $\{(A,1),(B,1),(D,-1)\}$

معناه أن :

$$z_C = \frac{z_A + z_B - z_D}{1}$$

ومنه $z_D = z_A + z_B - z_C$ (0,5)

$= -2-3i$

D نظيرة C بالنسبة إلى Ω معناه أن Ω هي منتصف $[CD]$
وهذا محقق لأن

$$\frac{z_C+z_D}{2} = \frac{1+3i-2-3i}{2} = -\frac{1}{2} = z_\Omega$$ (0,5)

الرباعي ADCB هو مستطيل لأن :

$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = 1+3i+2-3i = 3$ لأن (0,5)

$z_{\overrightarrow{DB}} = z_B - z_D = 1-3i+2+3i = 3$

ومنه $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$ (ADCB هو متوازي أضلاع)

وبما أن $AC = 2CB$ $(AC \neq CB)$

ولدينا $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

التمرين الرابع:

$$f(x) = x - (x^2+1)e^{-x+1}$$

1) أ- نهايات f:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$ 0,25

لأن: $\lim_{x\to-\infty} e^{-x+1} = \lim_{t\to+\infty} e^{t} = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x - x^2 e^{-x+1} - e^{-x+1}\right]$$ 0,1

لأن: $\lim_{x\to+\infty} e^{-x+1} = \lim_{t\to-\infty} e^{t} = 0$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x - \frac{x^2}{e^x}\cdot e - e^{-x+1}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x - \frac{x^2}{e^x}\cdot e - e^{-x+1}\right]$$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$

$$= +\infty$$

ب- المشتقة: f دالة قابلة للاشتقاق على IR ولدينا من أجل كل $x \in IR$

$$f'(x) = 1 - \left(2x e^{-x+1} - e^{-x+1}(x^2+1)\right)$$

$$= 1 - 2x e^{-x+1} + e^{-x+1}(x^2+1)$$

$$= 1 + (x^2 - 2x + 1)e^{-x+1} = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$$ 0,1

من أجل كل $x \in IR$ $f'(x) > 0$ لأن $(x-1)^2 > 0$ و $e^{-x+1} > 0$

ومنه f دالة متزايدة تماما على IR 0,1

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	+
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2) أ) (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$ لأن

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to+\infty}\left[-(x^2+1)e^{-x+1}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{x^2}{e^x}\cdot e - e^{-x+1}\right] = 0$$ (0,25)

وضعية $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (Δ)

ليكن $x\in\mathbb{R}$ $\quad f(x)-y = -(x^2+1)e^{-x+1} < 0$ (0,25)

ومنه $(\mathcal{C}_f)$ تحت (Δ) على $\mathbb{R}$

3) المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α لأن $1,8<\alpha<1,9$

f مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $f(1,8)\times f(1,9)<0$ (0,25)

وحسب م ق م يتحقق المطلوب.

4) معادلة المماس (T) لـ $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$ (0,25)

$$= x-1-1 \qquad f(1) = -1$$

$$= x-2 \qquad f'(1) = 1$$

5) المشتقة الثانية ليكن $x\in\mathbb{R}$

$$f''(x) = 2(x-1)e^{-x+1} - e^{-x+1}(x-1)^2$$ (0,25)

$$= (x-1)(2-x+1)e^{-x+1} = (x-1)(3-x)e^{-x+1}$$

$f(0) = -2$

$$= -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$$ (0,25)

f'' انعدمت وغيرت إشارتها عند 1 و 3.

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$3-x$	$+$		$+$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$(\mathcal{C}_f)$ يقبل نقطتي انعطاف هما $A(1,-1)$ و $B(3,f(3))$

المعادلة $f(x)=x+m$ حلولها هي فواصل نقط تقاطع $(\mathcal{C}_f)$ و $(\Delta_m): y=x+m$

$m\in]-\infty,-e[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا.

$m=-e$ " " " " مضاعفا معدوما.

(0,5)

$m\in]-e,0[$ " " " " موجبا

$m\in[0,+\infty[$ المعادلة لا تقبل حلولا

III) 1 - الدالة G دالة أصلية لـ $x\mapsto xe^{-x+1}$ لأن

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ $G'(x)=-\left(e^{-x+1}-e^{-x+1}(x+1)\right)$

$$=-e^{-x+1}+xe^{-x+1}+e^{-x+1}$$

$$I_1=\int_0^1 xe^{-x+1}dx=\left[G(x)\right]_0^1$$ (0,25) (0,5)

$$=G(1)-G(0)=-2+e=e-2$$

(2) ليكن $n\in\mathbb{N}$

$$I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x+1}dx$$

$$=\left[-x^{n+1}e^{-x+1}\right]_0^1-\int_0^1 -(n+1)x^n e^{-x+1}dx$$

$$=-1+(n+1)\int_0^1 x^n e^{-x+1}dx$$

$$=-1+(n+1)I_n$$ (0,5)

$$I_2=-1+2I_1=-1+2(e-2)=2e-5$$

(0,25)

$$S = \int_0^1 (y - f(x))\,dx = \int_0^1 (x^2+1)e^{-x+1}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^2 e^{-x+1}\,dx + \int_0^1 e^{-x+1}\,dx$$

0,25

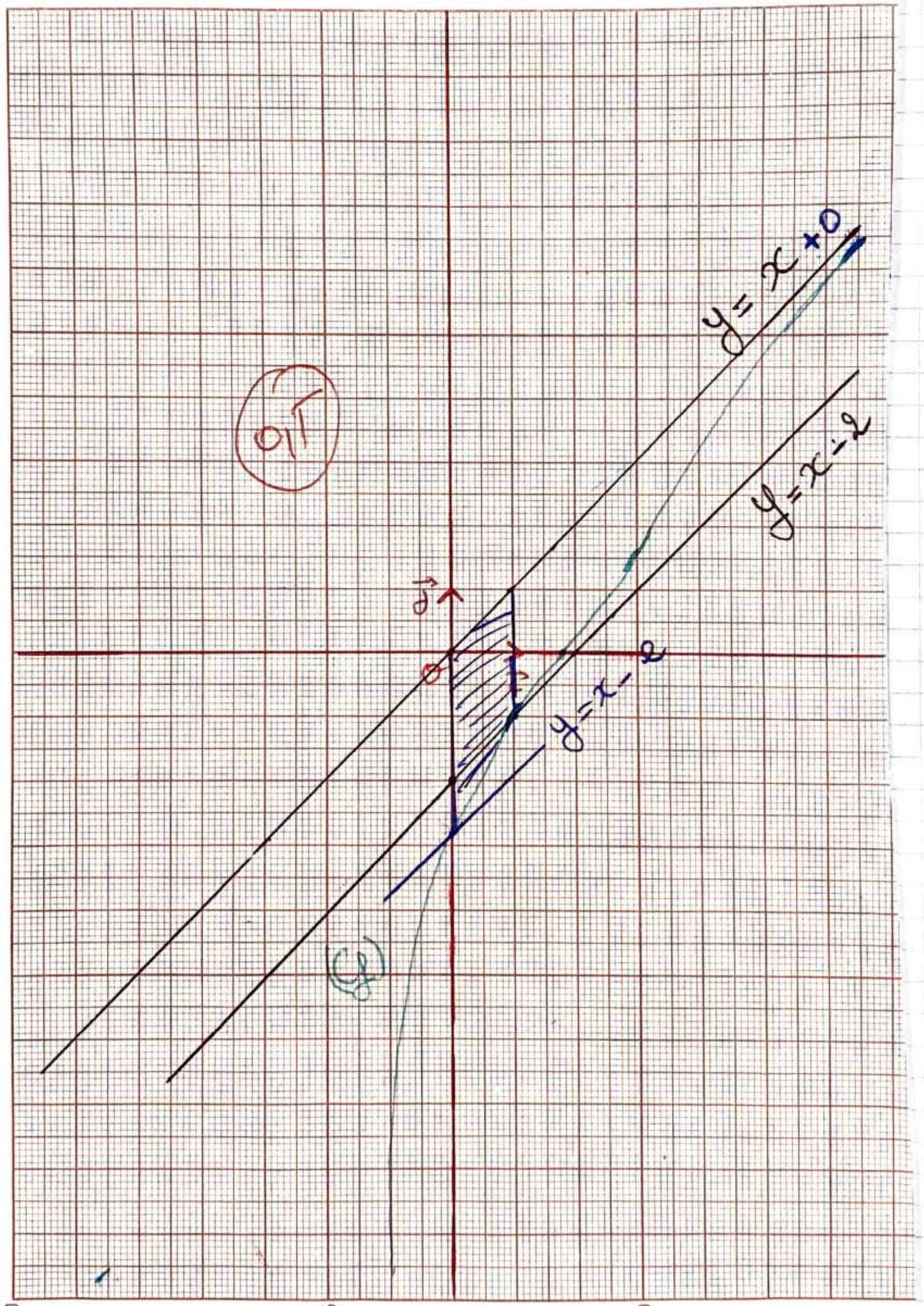
$$= I_2 + \left[-e^{-x+1}\right]_0^1$$

$$= I_2 + (-1+e) = 2e - 5 - 1 + e$$

$$= 3e - 6 \ (u.a)$$

$$S=\int_0^1 (y-f(x))\,dx=\int_0^1 (x^2+1)e^{-x+1}\,dx$$

$$=\int_0^1 x^2e^{-x+1}\,dx+\int_0^1 e^{-x+1}\,dx$$



التمرين 05 :

$u_0 = 0 \quad u_{n+1} = 2u_n + 1$

I) 1) أ- حساب الحدود : $u_1 = 2u_0 + 1 = 1$ (0,25)

ب- البرهان بالتراجع أن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $P(n) \quad u_n = 2^n - 1$

لدينا $u_0 = 0 = 2^0 - 1$ ومنه $P(0)$ مُحققة

ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، نفرض $P(n)$ أي أن $u_n = 2^n - 1$

ومنه $2u_n = 2^{n+1} - 2$ ومنه $2u_n + 1 = 2^{n+1} - 1$ ومنه $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$

ومنه $P(n+1)$ مُحققة. (0,75)

$w_n = 2^n \qquad v_n = u_n + 3$

(w_n) هندسية لأن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

أساسها $q = 2$

$$w_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2w_n$$ (0,25)

$$S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n = w_0 \times \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

$$= \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1$$ (0,25)

$$S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n \qquad v_n = u_n + 3$$

(0,25)
$$= w_0 + 2 + w_1 + 2 + \dots + w_n + 2 \qquad = 2^n - 1 + 3$$

$$\qquad = 2^n + 2$$

مرة $n+1$

$$= w_0 + w_1 + \dots + w_n + 2 + 2 + \dots + 2 \qquad = w_n + 2$$

$$= 2^{n+1} - 1 + 2(n+1) = 2^{n+1} + 2n + 1$$

(0,25)
$$S''_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n \qquad u_n = 2^n - 1$$

$$= w_0 - 1 + w_1 - 1 + \dots + w_n - 1 \qquad = w_n - 1$$

$$= 2^{n+1} - 1 - 1 \times (n+1) = 2^{n+1} - n - 2$$

القيم الممكنة لـ $PGCD(U_n, V_n)$ هي 1 و 3.

لدينا $\begin{cases} d \mid U_n \\ d \mid V_n \end{cases}$ ومنه $d \mid 2^n - 1$ و $d \mid 2^n + 2$ ومنه $d \mid 2^n + 2 - (2^n - 1)$

$d \mid 2^n + 2 - 2^n + 1$ (0,2)

ومنه $d \mid 3$.

بواقي قسمة 2^n على 3.

لدينا $2^0 \equiv 1[3]$ و $2^1 \equiv 2[3]$, $2^2 \equiv 1[3]$

هذه البواقي دورية ودورها 2 (0,2) إذا كان $n = 2k$ فإن $2^n \equiv 1[3]$

إذا كان $n = 2k+1$ فإن $2^n \equiv 2[3]$

لدينا $n \in \mathbb{N}$ نضع $V_n \equiv 0[3]$ تكافئ $2^n + 2 \equiv 0[3]$

تكافئ $2^n \equiv -2[3]$ ومنه تكافئ $2^n \equiv 1[3]$ (0,2)

ومنه $n = 2k$

إذا كان $n = 2k+1$ فإن 3 لا يقسم V_n ومنه في هذه الحالة $PGCD(U_n, V_n) = 1$

ومنه يكون (U_n) و (V_n) أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذا كان $n = 2k+1$ (0,2)

3) لدينا $n \in \mathbb{N}$ نضع $S''_n \equiv S'_n[3]$ تكافئ $2^{n+1} - n - 2 \equiv 2^{n+1} + 2n + 1[3]$

تكافئ $-3n - 3 \equiv 0[3]$ تكافئ $3 \mid -3(n-1)$

(0,2)